数理解析研究所講究録
620巻 1987年 146-161

LinkのArf invariantとpolynomial invariants

大阪市立大学理学部　村上　斉（Hitoshi Murakami）

Alexander, Conway, Jones, Freyd, Yetter, Hoste, Lickorish, Millett, Ocneanu, Przytycki, Traczyk [1, 3, 5, 12, 14, 15, 20, 27] によって導入されたpolynomial invariantsのもつ性質をいくつか述べる。§1では，Conway polynomial $\nabla_L(z)$ とArf invariant $\mathrm{Arf}(L)$ [28] との関係を，§2では，Jones polynomial $V_L(t)$ と$\mathrm{Arf}(L)$との関係を，§3では，n個のSeifert circlesからできるlinkの2-variable Jones polynomial $P_L(a, z)$ のみたす公式について論じる。

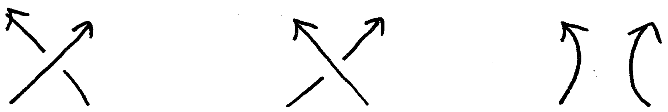
§0　準備

<u>定義 0.1</u>　LをS^3の中の向き付けられたlinkとする。Lの2-variable Jones polynomial $P_L(a, z) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$を，次の性質（I），（II）をみたすように定義する。[5, 12, 15, 20, 27]

（I）　$P_O(a, z) = 1$，ただしOはtrivial knot。

(II) L_+, L_-, L_0 が次の図のように与えられているとき，

$$a^{-1}P_{L_+} - aP_{L_-} + zP_{L_0} = 0 \quad ,$$



L_+　　　L_-　　　L_0

ただし，上の図以外の部分の diagram はすべて同じ。

Alexander polynomial $\Delta_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$ ([1]) は

$$\Delta_L(t) = P_L(1, t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{で,}$$

Conway polynomial $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$ ([3, 16]) は

$$\nabla_L(z) = P_L(1, z) \quad \text{で,}$$

Jones polynomial $V_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$ ([14, 15]) は

$$V_L(t) = P_L(t, t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{で}$$

それぞれ定義する。

次に link の Arf invariant を定義する。まず，link $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ が proper であるとは $lk(K_i, L - K_i) \equiv 0 \mod 2$ がすべての i について成り立つことである。ただし，lk は

linking number.

<u>定義 0.2</u> Lをproper link, Fをその connected Seifert surface とするとき, $\mathbb{Z}_2$ 上の quadratic form

$$g : H_1(F;\mathbb{Z}_2)/i_* H_1(\partial F;\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$$

を, $g(x) = lk(x, x^+)$ で定義する。ただし x^+ は, cycle x をFの表側に push-off したもの。この g のとる値が, 0の方が多いとき $Arf(L) = 0$, 1の方が多いとき $Arf(L) = 1$ と定める.

実際には, 次の Kauffman により与えられた定理を使って Arf invariant を計算することにする。

<u>定理 0.1</u> [16, 17] Kが knot のとき

$$Arf(K) \equiv \nabla_K(z) \text{ の } z^2 \text{ の係数} \pmod 2.$$

link の場合は, 次の定理が基本的である.

<u>定理 0.2</u> [28] knot K と proper link L が "relate" しているとき,

$$\mathrm{Arf}(K) = \mathrm{Arf}(L)。$$

ただし，relate しているとは，$S^3\times[0,1]$ に proper，locally flat にうめこまれた disk with holes D があり，$D\cap S^3\times\{0\} = K$，$D\cap S^3\times\{1\} = -L$ となることをいう.

§1. Arf invariant と Conway polynomial

この section は [23] の内容を要約したものである．なお，[23] の論文の校正中に，大阪市大の作間氏に大変お世話になりました．この場をかりてお礼申し上げます．ありがとうございました．

定義 1.1. L の Conway polynomial $\nabla_L(z)$ の $n-1$ 次の係数を mod 2 でみたものを $C(L)$ と表す。($\#(L)=n$)

次の定理は [26] の定理を $\nabla_L(z)$ の言葉で言い換えたものである。[10] でも同じ定理が $\nabla_L(z)$ の言葉で示されているが，この証明とは全く違っている.

定理 1.1 $L = K_1\cup K_2$ を 2-component proper link とする。このとき

$$\mathrm{Arf}(L) = C(L) + C(K_1) + C(K_2)。$$

証明　L の diagram を考え，$x_1, x_2, \cdots, x_m$ を K_2 と K_1 の crossing のうち K_2 が K_1 の下を通っているものとする。（m は even）

L_i を，x_1 から x_i までの crossing を入れかえた link，k_i を L_i の crossing x_i を smoothing（ or を に）したものとする。$\nabla_L(z)$ の定義より

$$
\begin{aligned}
\nabla_L(z) &\equiv \nabla_{L_1}(z) + z\,\nabla_{k_1}(z) \\
&\equiv \nabla_{L_2}(z) + z\,\nabla_{k_2}(z) + z\,\nabla_{k_1}(z) \\
&\equiv \cdots \equiv \nabla_{L_m} + z\left\{\sum_{i=1}^{m} \nabla_{k_i}(z)\right\} \quad (\mathrm{mod}\ 2).
\end{aligned}
$$

ここで L_m は split link だから $\nabla_{L_m}=0$。よって $\nabla_L(z) \equiv z\left\{\sum_{i=1}^{m} \nabla_{k_i}(z)\right\}$ (mod 2)。つまり $C(L) \equiv \sum_{i=1}^{m} C(k_i)$ (mod 2)。

ここで，k_{2j} と k_{2j+1} は，ともに L_{2j} という proper link に relate しているから $Arf(k_{2j}) = Arf(k_{2j+1})$（定理 0.2）。定理 0.1 より $C(k_{2j}) \equiv C(k_{2j+1})$。よって，$C(L) \equiv C(k_1) + C(k_m)$。

ところが，$C(k_1) = Arf(k_1) = Arf(L)$，$C(k_m) = Arf(k_m) = Arf(K_1 \# K_2) = Arf(K_1) + Arf(K_2) = C(K_1) + C(K_2)$ だから求める式を得る。

（証明終わり）

この方法により，いろいろな種類の link について Arf

invariant を計算することができる。(証明は省略)

定理 1.2　L を purely proper link (つまり、各成分 K_i, K_j について $lk(K_i, K_j) \equiv 0 \mod 2$) とすると、

$$Arf(L) = \sum_{l \subseteq L} C(l), \qquad (\mathrm{mod}\ 2),$$

ここで l は L の sublink すべてを動く。

注　[10] でも同じ式が示されている。また [11]、[29] によると、各成分間 linking number が 0 のとき $C(l) = 0$ (ただし $\#(l) \geq 4$) だから、この場合上の式はずっと簡単になる。

定理 1.3　$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ を、次の性質をもつ proper link とする。

「K_1 と K_2, K_2 と K_3, ⋯, K_n と K_1 のみが、diagram 上で絡んでいる。しかもその linking number はすべて odd。」

このとき

$$Arf(L) = C(L) + (n+1)\left\{\sum_{i=1}^{n} C(K_i)\right\} \qquad (\mathrm{mod}\ 2)$$

<u>定理 1.4</u>　$L=K_1\cup K_2\cup K_3$ を 3-component proper link とする。

(i) L が purely proper なら

$$\begin{aligned}Arf(L)= C(L)&+C(K_1\cup K_2)+C(K_2\cup K_3)+C(K_3\cup K_1)\\&+C(K_1)+C(K_2)+C(K_3) \pmod 2\end{aligned}$$

(ii) $lk(K_i, K_j)\equiv 1 \pmod 2$ なら

$$Arf(L)=C(L)$$

<u>注</u>　上の定理は定理 1.2, 1.3 を組み合わせたもの。

<u>定理 1.5</u>　$L=K_1\cup K_2\cup K_3\cup K_4$ を 4-component proper link とする。

(i) L が purely proper なら定理 1.2 の形。

(ii) $lk(K_4, K_i)\equiv 0 \pmod 2$, $i=1,2,3$ かつ

$lk(K_i, K_j)\equiv 1 \pmod 2$　$i,j=1,2,3$

のときは

$$Arf(L)=C(L)+C(K_1\cup K_2\cup K_3)+C(K_4).$$

(iii) $lk(K_1,K_3)\equiv lk(K_2,K_4)\equiv 0 \pmod 2$,

$lk(K_i, K_j)\equiv 1 \pmod 2$, ($i,j$ は上以外)

のときは

$$\begin{aligned}Arf(L)= C(L)&+C(K_1\cup K_3)+C(K_2\cup K_4)\\&+C(K_1)+C(K_2)+C(K_3)+C(K_4).\end{aligned}$$

3 or 4-component link で proper なものは上の定理の場合しかないので，4 components 以下の link の Arf invariant は ∇_L によって完全に表現される．

同じ方法でこれ以上の components をもつ link についても公式ができそうだが，一般の式はまだできていない．§2の結果との関係を考えるのもおもしろいかもしれない．また，[11]にある Casson invariant の公式との類似性も興味深い．（Casson invariant については[6]参照）

§2. Arf invariant と Jones polynomial

この section は[24]の内容を要約したものである．

$i=\sqrt{-1}$, $\sqrt{i}=e^{\frac{5}{8}\cdot 2\pi i}$ としたとき，次の定理が成り立つ．

<u>定理 2.1</u>

$$V_L(i)=\begin{cases} (\sqrt{2})^{\#(L)-1}\times(-1)^{\#(L)-1}, & L\text{ が proper かつ } \mathrm{Arf}(L)=0 \\ -(\sqrt{2})^{\#(L)-1}\times(-1)^{\#(L)-1}, & L\text{ が proper かつ } \mathrm{Arf}(L)=1 \\ 0, & L\text{ が non-proper} \end{cases}$$

<u>注</u>　右辺の符号が[24]と違っているのは，$V_L(t)$ の定義が違っているからである．

証明は，次の lemma を使い，resolution tree についての induction で行う．詳細は省略するので[24]を参照．

補題 2.1 L_+, L_-, L_0 を，§0 の図のような link とし，$\#(L_+)=\#(L_-)=\#(L_0)-1$ とする．L_+ と L_- が proper で，L_0 が non-proper なら $Arf(L_+) \neq Arf(L_-)$。

証明は，[17]，[21] で示されている $Arf(K_+)+Arf(K_-) \equiv lk(k_1, k_2) \pmod{2}$ を使う。ここで K_+, K_-, $k_1 \cup k_2$ は，§0 の図のようになっている knot および 2-component link である．proper link を fusion しても Arf invariant はかわらない（定理 0.2）ことに注意．

この結果も，§1 と同様，形式的に示されたにすぎない，なぜこうなるのかといった根本的な理由はなぞのままである。

§3. 2-variable Jones polynomial に関する公式

この section は [25] の内容を要約したものである．

D を link L の diagram としたとき crossing の sign の総和を $w(D)$ とかき writhe とよぶ。[18, 19]（ が -1， が $+1$）

L が braid として表されているとき $w(D)$ は，その exponent sum に一致する．また $w(D)$ は [22] において $\hat{c}(D)$ とかかれているものである。

D の Seifert circles とは D の crossing をすべて smoothing した結果得られる simple closed curves のことである．

次の式が成り立ってしまう。(§1, §2 と同様, なぜこうなるかはまだわからない。)

<u>定理 3.1</u> n 個の Seifert circles から成る diagram D の表す link を L とする。このとき

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\Big\{\prod_{\substack{0\le j<k\le n\\ j\ne i,\,k\ne i}}(a_j a_k^{-1}-a_j^{-1}a_k)\Big\}a_i^{-w(D)}P_L(a_i, z)=0.$$

<u>注.</u> L を closed n-braid として表わしても同じ式が成立する。

$P_L(t^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})=1$ [20], $P_L(t^{-\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})=(-1)^{\#(L)-1}$, $P_L(t^{-1}, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})=(-1)^{\#(L)-1}V_L(t^{-1})$ および定義 0.1 より, 次の系が成り立つ.

<u>系 3.1</u> L を 3 個の Seifert circles からできる link とする。そのとき

$$P_L(a, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})=a^{w(D)}\Big\{\frac{(a-a^{-1})}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})(t-t^{-1})}\Big\{t^{-\frac{1}{2}w(D)}(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1})$$

$$-(-1)^{w(D)}t^{\frac{1}{2}w(D)}(t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{-\frac{1}{2}}a)\Big\}+\frac{(t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{\frac{1}{2}}a)(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1})}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})^{2}}\Delta_L(t$$

系 3.2　Lを4個のSeifert circleからできるlinkとする．そのとき　$P_L(a, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})$ は，Δ_L と V_L または V_L のみを使って表せる．（くわしい形は［25］参照）

系 3.3　Lを5個のSeifert circleからできるlinkとする．そのとき $P_L(a, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})$ は Δ_L と V_L を使って表せる。（くわしい形は［25］参照）

注．　系3.1は［14, 15］に示されている．その証明は，ここで述べるものとは全く違っていて，Hecke algebraの表現によるものである．おそらく系3.2, 3.3についても同じような説明がつくものと思われる．（［2］も参照）

定理3.1の証明には次のlemmaが基本的な役割を果たす。

補題 3.1

$$\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{w(D)} P_L(a_i, z) \quad \text{は，} \quad P_L(a_0, z) \text{ に関する}$$

axiom (II) をみたす。

証明は確かめてみるだけで，すぐにできる．上の補題の意味するところは，$\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{w(D)} P_L(a_i, z)$ が，$P_L(a_0, z)$ と同じ

"漸化式"をみたすということである。だからそれらの一次結合 $\sum_{i=1}^{n} f_i \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{w(D)} P_L(a_i, z)$ (ただし, f_i は L に無関係) も $P_L(a_0, z)$ と同じ"漸化式"をみたす。あとは"初期値"が一致すれば, すべての L について $P_L(a_0, z)$ と等しくなり, 定理3.1が従う。その"初期値"がn個しかなく, 従って f_i についての連立n元一次方程式が解けることを保証しているのが次の lemma である。

補題3.2 すべての link diagram D は, いくつかの crossing を入れかえることによって, writhe が 0 か 1 であるような trivial link にできる.

証明は省略するが, $n + \#(L) \equiv w(D) \pmod 2$ であることから, 上で得られる trivial link の writhe は一意にきまることに注意されたい。この補題3.2と上に述べたことにより, "初期値"はn個しかないこと, つまり任意の link L の resolution tree をとったとき, その一番下にくる leaves は n個の種類しかないことがわかる. 実際に行列式の計算をして, Cramer の方法により一次方程式を解いてもよいが, 次の補題に気付けば, 定理3.1の証明は容易である.

<u>補題 3.3</u> $F_p = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left\{ \prod_{\substack{0\le j<k\le n \\ j\ne i,\, k\ne i}} (a_j a_k^{-1} - a_j^{-1} a_k) \right\} a_i^{\,p}$

とおくと，$|p| \leqq n-1$, $p \equiv n-1 \pmod 2$ となる整数 p について $F_p = 0$ である．

この lemma は，F_p の次数と，その解の個数（a_0 の方程式としてみたとき $F_p=0$ の解の個と）を比較することにより示される。これを使い，補題 3.2 で得られる link L に対しては $a_i^{-w(D)} P_L(a_i, z)$ の a_i についての次数が $n-1$ 以下であることに注意すれば，定理 3.1 が示される。

また，F_p は，$|p| \geqq n$ のときは 0 にならないことに注意すると，次の Morton, Franks, Williams による定理が得られる。

<u>定理 3.2</u> [4, 22]

$$w(D) - (n-1) \leqq e \leqq E \leqq w(D) + (n-1).$$

ただし，n は D の Seifert circles の数，e, E はそれぞれ $P_L(a, z)$ の a についての最低，最高次数．

<u>注</u> 定理 3.1 は定理 3.2 からも示すことができる．（補題 3.3 を使う）　つまり，定理 3.1 からは，定理 3.2 より強い結果はでないことがわかる。大阪大学の山田氏によれば，

Seifert circles の最小数と braid index とは等しい(つまり，n個の Seifert circles からできる diagram は，同じ数の strings からできる braid に移せる．なお，これは神戸大学の中西氏の予想である。)ので，この不等式は braid index についても同じ強さを持っている。また，[15]には，10-crossing 以下の knot の braid index が示されている。(10_{132}, 10_{150}, 10_{156} 以外は決定されている.) braid index の決定については，最近 H.R. Morton と H.B. Short が preprint "The 2-variable polynomial of cable knots" で cabling を使った評価を与えようとしている。

Morton, Franks, Williams の不等式からわかるもう一つのことは，$E-e=2(n-1)$ のとき $w(D)=\frac{1}{2}(E+e)$ となること，つまり Seifert circles の数がぎりぎりまで ($\frac{1}{2}(E-e)$まで) 落とされたとき，writhe は link の invariant になることである。

何度も書いたことであるが，以上の結果は単に式を計算しているとでてきたものであり，理論的な根拠はなにもない。これらの結果が成立する原因を究明することにより，2-variable polynomial のもつ幾何学的な意味付けを多少なりとも行なうことがこれからの課題である。

References

[1] J.W. Alexander : Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc., 30(1928), 275-306.

[2] J.S. Birman : On the Jones polynomial of closed 3-braids, Invent. Math. 81(1985), 287-294.

[3] J.H. Conway : An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, Oxford and New York, 1969, 329-358.

[4] J. Franks and R.F. Williams : Braids and the Jones-Conway polynomial. Preprint, North-Western, 1985.

[5] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu : A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. 12(1985), 239-246.

[6] S. Fukuhara : Casson の不変量について, 「低次元多様体の幾何学的諸相」, 1985.

[7] C.A. Giller : A family of links and the Conway calculus, Trans. Amer. Math. Soc. 270(1982), 75-109.

[8] C.McA. Gordon (ed.) : Problems, Knot Theory (Proc., Plans-sur-Bex, 1977), Lecture Notes in Math., 685, Springer-Verlag, 1978, 309-311.

[9] F. Hosokawa : On ∇-polynomials of links, Osaka Math. J., 10 (1958), 273-282.

[10] J. Hoste : The Arf invariant of a totally proper link, Topology Appl., 18(1984), 163-177.

[11] J. Hoste : A formula for Casson's invariant, Preprint, Rutgers University, 1985.

[12] J. Hoste : A polynomial invariant of knots and links, Preprint, Rutgers University, 1984.

[13] V.F.R. Jones : Braid groups, Hecke algebras and type II_1 factors, Geometric Methods in Operator Algebras, Proc. of the US-Japan Seminar (1986), 242-273.

[14] V.F.R. Jones : A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 12(1985), 103-111.

[15] V.F.R. Jones : Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, Preprint, University of California, Berkeley, 1986.

[16] L.H. Kauffman : The Conway polynomial, Topology, 20(1981), 101-108.

[17] L.H. Kauffman : Formal Knot Theory, Math. Notes, 30, Princeton Univ. Press, 1983.

[18] L.H. Kauffman : A geometric interpretation of the generalized polynomial, Preprint, 1985.

[19] L.H. Kauffman : An invariant of regular isotopy, Preprint, 1985.

[20] W.B.R. Lickorish and K.C. Millett : A polynomial invariant of oriented links, to appear in Topology.

[21] Y. Matsumoto : An elementary proof of Rochlin's signature theorem and its extention by Guillou and Marin, Preprint, 1977 (to appear in Astérisque).

[22] H.R. Morton : Seifert circles and knot polynomials, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 99(1986), 107-109.

[23] H. Murakami : The Arf invariant and the Conway polynomial of a link, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 11(1983), 335-344.

[24] H. Murakami : A recursive calculation of the Arf invariant of a link, J. Math. Soc. Japan, 38(1986).

[25] H. Murakami : A formula for the two-variable Jones polynomial, Preprint, Osaka City University, 1986.

[26] K. Murasugi : On the Arf invariant of links, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 95(1984), 61-69.

[27] J.H. Przytycki and P. Traczyk : Invariants of links of Conway type, to appear in Kobe J. Math.

[28] R.A. Robertello : An invariant of knot cobordism, Comm. Pure Appl. Math., 18(1965), 543-555.

[29] K. Sugisita : アルフ不変量とT ジーナス, 「グラフ理論と3次元多様体」, 数理解析研究所講究録 575, 1985.